

Тернопільський національний технічний  
університет імені Івана Пулюя

---

Кафедра автоматизації  
технологічних процесів  
і виробництв

Лабораторна робота № 4  
з курсу  
”Цифрова обробка сигналів та  
зображень”  
Дискретне перетворення Фур'є

Тернопіль 2017

Методичні вказівки до лабораторної роботи № 4 "Дискретне перетворення Фур'є" з курсу "Цифрова обробка сигналів та зображень". Автори: Пісьціо В.П., Медвідь В.Р. Тернопіль: ТНТУ, 2017 - 16 с.

Для студентів напрямку: 6.050201 "Системна інженерія "

Автори: Пісьціо В.П., Медвідь В.Р.

Розглянуто і затверджено на засіданні кафедри автоматизації технологічних процесів і виробництв (протокол № 1 від 22.08.2017 року)

## Тема роботи

Дискретне перетворення Фур'є.

## Мета роботи

Ознайомлення із дискретним перетворенням Фур'є, та особливостями його застосування.

### Дискретне перетворення Фур'є

Дискретне перетворення Фур'є можна отримати безпосередньо з інтегрального перетворення шляхом дискретизації аргументів:

$$t \rightarrow t_k = k\Delta t \text{ та } \omega \rightarrow \omega_n = n\Delta\omega \quad (1)$$

де  $\Delta t = T/N$  називається кроком за часом, а  $\Delta\omega$  - кроком за частотою. Тоді співвідношення для прямого і зворотного перетворення Фур'є переписуться у вигляді:

$$F(\omega_n) = \Delta t \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t_k) e^{-i\omega_n k \Delta t}, \quad (2)$$

$$f(t_k) = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega_n) e^{it_k n \Delta\omega}. \quad (3)$$

Варто нагадати, що дискретизація функції за часом призводить до періодизації її спектру і, навпаки, дискретизація спектру за частотою – до періодизації функції. Отже, звідси можна зробити наступне зауваження. Для дискретних Фур'є перетворень і функція, і її спектр є дискретними та періодичними.

Розглядаючи вирази (2) та (3) можна побачити, що перетворення Фур'є дискретного сигналу має дві основні реалізаційні проблеми. По-перше, сумування нескінченного числа вхідних відліків в дійсності неможливе, тому потрібен який-небудь спосіб скорочення кількості відліків, що необхідна. По-друге, для реалізації процедури розрахунку потрібно замінити неперервну змінну на дискретну, тобто обрати крок дискретизації спектру.

Перша проблема легко вирішується виділенням кінцевого числа відліків або, інакше кажучи, накладанням вікна. При цьому необхідно зауважити, що в цьому випадку спектр дискретного сигналу буде являти собою згортку образу цього сигналу з функцією вікна. Згідно з теоремою відліків частотний спектр повторюється з періодом, що дорівнює частоті дискретизації, тому можливо встановити, яка кількість відліків  $N$  необхідна для точного опису сигналу, що визначається функцією.

При дискретному перетворенні Фур'є кількість спектральних складових, що потрібно розрахувати, зазвичай дорівнює кількості відліків вхідного сигналу  $N$ . Якщо покласти, що відстань між частотними відліками в спектрі є такою, що

$$N\Delta\omega = \omega_d \text{ або } \Delta\omega = \omega_d / N \quad (4)$$

Зазначені рівності дають змогу перетворити неперервну частотну шкалу в дискретну, враховуючи, що  $\omega_d = 2\pi / \Delta t$  можна записати:

$$\Delta\omega \cdot \Delta t = \frac{\omega_d}{N} \cdot \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{N} \quad (5)$$

Після підстановки (5) в (1) та (2) з відповідною заміною аргументів  $t_k$  та номерами відліків для  $N$  відліків отримаємо:

$$F_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k \cdot e^{-i \frac{2\pi kn}{N}}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (6)$$

$$f_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n \cdot e^{i \frac{2\pi kn}{N}}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (7)$$

Перетворення (6) та (7) називають дискретними перетвореннями Фур'є (ДПФ). З вира-

зів ДПФ можна побачити, що для розрахунку кожної гармоніки потрібно  $N^2$  операцій комплексного множення та додавання і відповідно операцій на повне виконання ДПФ. При великих об'ємах масивів даних це може призводити до суттєвих часових витрат. Прискорення розрахунків досягається при використанні швидкого перетворення Фур'є.

### Зв'язок між спектрами аналогового і дискретного сигналів

Щоб оцінити ті явища, які виникають при дискретному перетворенні Фур'є, розглянемо спочатку, як пов'язані спектри аналогового і дискретизованого сигналів. Нехай нам дано деякий безперервний аналоговий сигнал  $x(t)$ , якому відповідає функція спектральної щільності  $F(\omega)$ :

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j\omega t) dt$$

Побудуємо інший сигнал  $y(t)$ , що представляє собою вибірку вихідного сигналу  $x(t)$  в дискретні моменти часу  $\tau, 2\tau, 3\tau, \dots$ , аналогічно тому, як це показано на наступному рисунку.

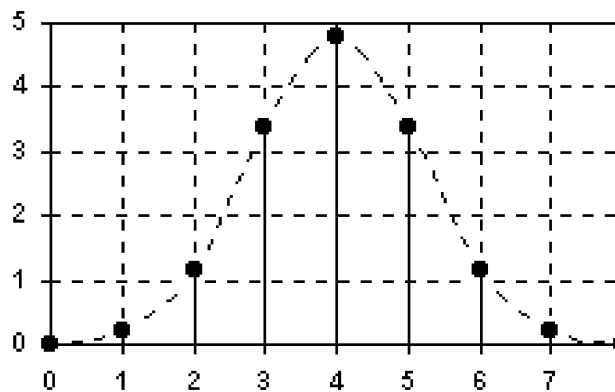


Рис. 1. Дискретизація аналогового сигналу

Для того, щоб вираз для  $y(t)$  можна було записати аналітично, введемо допоміжну функцію одиничного нескінченно короткого імпульсу

$$\xi(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t = 0 \\ 0 & \text{при } t \neq 0 \end{cases}$$

Тоді дискретизований сигнал можна записати аналітично:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \xi(t - \tau \cdot k)$$

Видно, що  $y(t)$  відмінний від 0 лише у моменти часу кратні кроку дискретизації  $\tau$  від нуля. Якщо спробувати побудувати спектр сигналу, то отримаємо спектр тотожно рівний нулю. Щоб обійти це введемо допоміжний сигнал

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \delta(t - \tau \cdot n)$$

де  $\delta$  - дельта функція Дірака. м  $t = 0$ . Видно, що сигнал  $s(t)$  відрізняється від вибірки лише амплітудою сигналу. Тому форма спектру для сигналу  $s(t)$  буде співпадати із формою спектра сигналу  $y(t)$ . Отже побудуємо спектральну щільність сигналу  $s(t)$ :

$$F_s(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\tau) \right] \exp(-j\omega t) dt$$

Функція  $\varphi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\tau)$  представляє собою періодичну послідовність дельта-функцій із періодом  $\tau$ , тому вона може бути розкладена у ряд Фур'є:

$$\varphi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \exp\left(j \frac{2\pi}{\tau} kt\right)$$

Коефіцієнти  $C_k$  можна знайти, використовуючи відоме співвідношення між спектральною

щільністю одиночного імпульсу (в даному випадку  $\delta(t)$ ) і коефіцієнтами ряду Фур'є періодичної послідовності таких імпульсів:

$$C_k = \frac{1}{\tau} F_{\delta} \left( \frac{2\pi}{\tau} k \right) = \frac{1}{\tau}$$

Підставляючи представлення коефіцієнтів у ряд, а ряд замість  $\varphi(t)$  і змінюючи порядок сумування і інтегрування отримаємо:

$$F_s(\omega) = \frac{1}{\tau} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp \left( -j \left[ \omega - \frac{2\pi}{\tau} k \right] t \right) dt$$

Вираз під інтегралом є ні що інше, як спектральну щільність сигналу  $x(t)$  на частоті  $\omega - \frac{2\pi}{\tau} k$ . Тому, остаточно отримуємо:

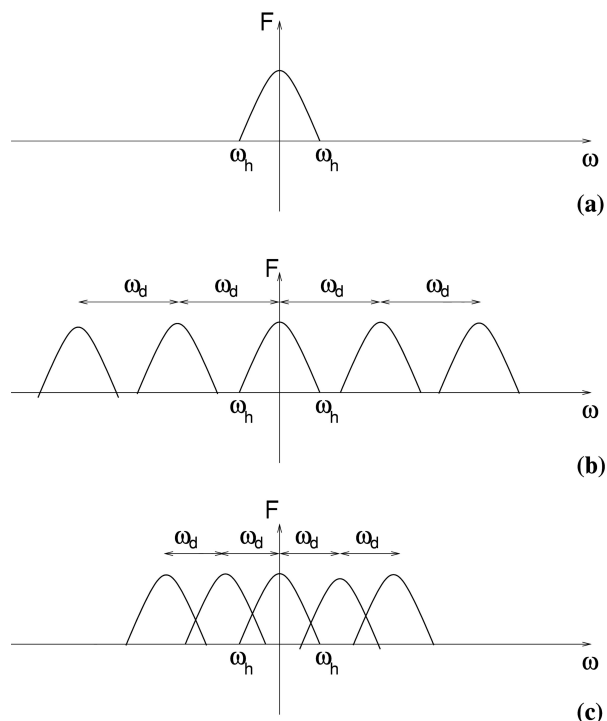
$$F_s(\omega) = \frac{1}{\tau} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F \left( \omega - \frac{2\pi}{\tau} k \right)$$

Таким чином, з формули видно, що спектр дискретизованого з рівномірним кроком сигналу являє собою "накладення" на спектр аналогового сигналу  $F(\omega)$  його копій, зсунутих на частоти, кратні частоті дискретизації  $\omega_d = 2\pi/\tau$ . Звідси можна зробити кілька важливих для практичного застосування висновків:

1. Спектр дискретного сигналу - є періодична функція частоти з періодом, рівним частоті дискретизації. Тому такий спектр має зміст вимірювати в смузі частот від 0 до  $\omega_d$  - на інших частотах він повторюється.

2. Якщо спектр аналогового сигналу обмежений зверху частотою  $\omega_h$ , причому  $2\omega_h \leq \omega_d$ , то спектр дискретизованого сигналу буде являти собою періодичне продовження спектру аналогового сигналу.

3. Якщо спектр аналогового сигналу має як завгодно високі частоти або ж він обмежений зверху частотою  $\omega_h$ , але при цьому частота дискретизації менше подвоєної граничної частоти спектра  $2\omega_h \leq \omega_d$ , спектр періодичного сигналу буде являти собою накладення на спектр  $F(\omega)$  його копій - буде відбуватися перекриття частин спектра як це показано на наступному рисунку.



**Рис. 2. Спектр аналогового сигналу (а) та спектри дискретизованого сигналу при відсутності (b) і наявності перекриття спектрів (c)**

З другого і третього пунктів можна зробити важливий висновок: для того, щоб

спектр дискретизованого сигналу не спотворює за рахунок накладення, необхідно, щоб частота дискретизації була як мінімум удвічі вище максимальної частоти в спектрі аналогового сигналу. Дане правило називають критерієм Котельникова (а в англійській літературі - критерієм Найквіста).

Отже, розглянувши властивості спектра дискретизованого сигналу, ми визначили умову для кроку дискретизації, тобто знайшли значення мінімальної частоти вибірки АЦП, яка достатня для обробки сигналів з певним характером спектра. Що станеться, якщо даний критерій не буде виконаний? У цьому випадку, як це випливає з рисунка відбудеться перекриття спектру з власним періодичним продовженням, таким чином, що низькочастотні складові спектра накладуться на високочастотні складові. Таке явище називають "просочуванням" високочастотних компонент спектра в область низьких частот (в англійській літературі - aliasing).

### Відновлення аналогового сигналу з його рівномірної вибірки

Чи можна відновити аналоговий сигнал з його вибірки, виробленої з рівномірним кроком? На перший погляд відповідь має бути негативною: адже при дискретизації необоротно втрачається інформація про значення сигналу в моменти часу, проміжні між точками вибірки. Однак, виявляється, що таке відновлення можливо, якщо крок дискретизації задовольняє критерію Найквіста. Дійсно, якщо ми виберемо інтервал дискретизації досить малим, спектр сигналу в основний смузі не буде спотворюватися за рахунок ефекту накладення. Отже, якщо відфільтрувати основну частину спектру, що лежить в смузі частот від 0 до  $0.5 \omega_d$ , ми отримаємо в точності спектр вихідного аналогового сигналу. Оскільки процедура розрахунку спектра і процедура відновлення сигналу з спектра (пряме і зворотне перетворення Фур'є) - взаємно однозначні, то вхідний аналоговий сигнал може бути повністю відновлений.

Нехай  $x(t)$  - сигнал з обмеженим спектром: його спектр міститься у полосі частот від нуля до  $\omega_h$ . Нехай, також  $x_d(n)$  - його вибірки з кроком дискретизації  $\tau$ , котрим відповідає частота дискретизації  $\omega_d = 2\pi/\tau$ . Також будемо вважати, що вибір кроку дискретизації відповідає критерію Найквіста:  $\omega_d \geq 2 \omega_h$ .

Запишемо сигнал через зворотне перетворення Фур'є від функції спектральної густини:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(j\omega t) d\omega.$$

Оскільки в силу критерію Найквіста, весь спектр сигналу міститься у полосі від  $-0.5 \omega_d$  до  $0.5 \omega_d$ , межі у інтегралі можна замінити:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-0.5\omega_d}^{0.5\omega_d} F(\omega) \exp(j\omega t) d\omega.$$

Функцію  $F(\omega)$  на інтервалі  $[-0.5 \omega_d; 0.5 \omega_d]$  можна розкласти у ряд Фур'є:

$$F(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \exp\left(j \frac{2\pi k}{\omega_d} \omega\right).$$

Тепер підставимо отриманий розклад у вираз і змінимо місцями послідовність сумування і інтегрування:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \int_{-0.5\omega_d}^{0.5\omega_d} \exp\left(j\omega \left[t + \frac{2\pi k}{\omega_d}\right]\right) d\omega.$$

Інтеграл легко береться, тому:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \int_{-\omega_d/2}^{\omega_d/2} \exp\left(j\omega \left[t + \frac{2\pi k}{\omega_d}\right]\right) d\omega,$$

де  $\text{Sinc}(x) = \sin(x)/x$ . Щоб знайти невідомі  $C_k$  підставимо у вираз  $t = -2\pi n/\omega_d$ :

$$x\left(-\frac{2\pi n}{\omega_d}\right) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \omega_d \cdot \text{Sinc}\left(\frac{\pi t}{T} - \pi k\right).$$

Так як функція  $\text{Sinc}(\pi k - \pi n)$  відмінна від 0 лише при  $n = k$  (і рівна при цьому 1) то:

$$C_k = 2\pi \cdot x(-k\tau)$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\tau) \cdot \text{Sinc}\left(\frac{\pi t}{T} - \pi k\right).$$

Права частина останньої формули називається рядом Котельникова. У відповідності із нею, значення аналогового сигналу у будь-якій момент часу  $t$  можна відновити за значеннями, вибірки із рівномірним кроком  $\tau$ , якщо крок дискретизації задовольняє критерію Найквіста. Це твердження носить назву теореми Котельникова.

### Ефекти, обумовлені кінцевою довжиною реалізації

Нехай є сигнал  $s(t)$ , заданий на нескінченному інтервалі часу  $-\infty < t < \infty$  і нехай перетворення Фур'є функції  $S(\omega)$  відомо, але з вимірювань відома реалізація сигналу скінченної довжини  $s_T(t)$  на протязі інтервалу часу  $-T/2 < t < T/2$ . Для моделювання сигналу скінченної довжини помножимо сигнал  $s(t)$  на так звану "функцію вікна"  $u(t)$  - у даному випадку прямокутний сигнал тривалістю  $2T$  симетричний відносно початку координат. Тоді вимірюваний сигнал визначається за формулою:

$$s_T(t) = s(t)u(t).$$

Так як прямокутний сигнал з амплітудою 1 та тривалістю  $T$ , симетричний відносно початку координат, має спектральну щільність:

$$U(\omega) = T \cdot \frac{\sin(\omega \cdot T/2)}{\omega \cdot T/2},$$

а спектральна щільність добутку сигналів визначається через згортку:

$$S_T(\omega) = \frac{1}{2\pi} S(\omega) * U(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\eta) U(\omega - \eta) d\eta,$$

тобто:

$$S_T(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega - \eta) \cdot T \cdot \frac{\sin(\eta T/2)}{\eta T/2} d\eta.$$

Отже, перехід до скінченної реалізації зводиться до згортки спектральної густини початкового нескінченного сигналу і функції  $T \cdot \frac{\sin(\eta T/2)}{\eta T/2}$ .

Продемонструємо ефекти, що виникають при такому переході, на прикладі гармонійного сигналу. Нехай гармонійний сигнал має частоту  $\omega_0$  та одиничну амплітуду:

$$s(t) = \cos(\omega_0 t).$$

Відомо, що його перетворення Фур'є на нескінченному часовому інтервалі представляє собою суму двох дельта-функцій:

$$S(\omega) = \pi(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)).$$

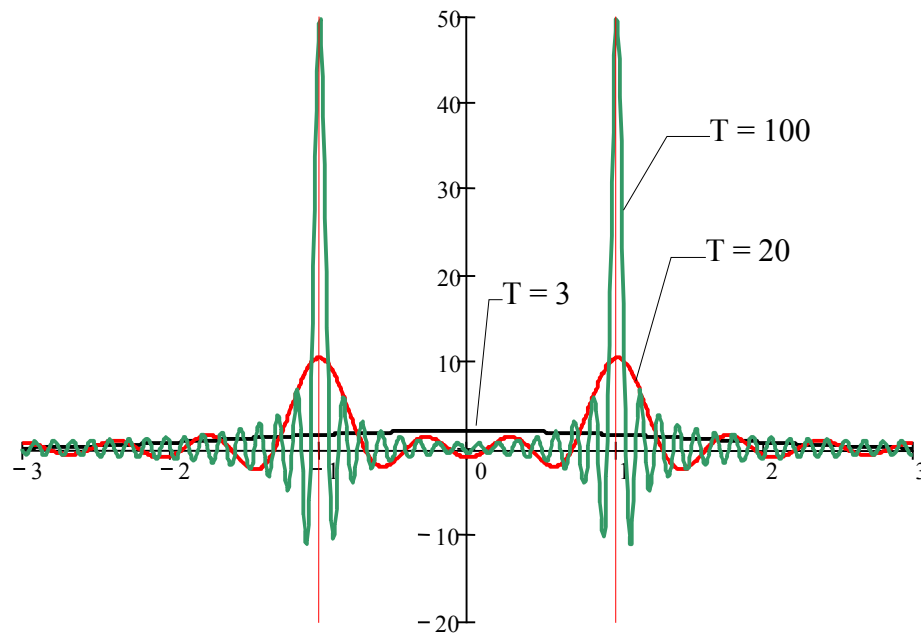
Для сигналу скінченної тривалості отримаємо наступне перетворення Фур'є

$$S_T(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega - \eta) \cdot T \cdot \frac{\sin(\eta T/2)}{\eta T/2} d\eta = \frac{T}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\delta(\omega - \omega_0 - \eta) + \delta(\omega + \omega_0 - \eta)) \frac{\sin(\eta T/2)}{\eta T/2} d\eta.$$

Враховуючі властивість  $\delta$ -функції отримаємо:

$$S_T(\omega) = \frac{T}{2} \cdot \left( \frac{\sin((\omega - \omega_0)T/2)}{(\omega - \omega_0)T/2} + \frac{\sin((\omega + \omega_0)T/2)}{(\omega + \omega_0)T/2} \right) = \left( \frac{\sin((\omega - \omega_0)T/2)}{(\omega - \omega_0)} + \frac{\sin((\omega + \omega_0)T/2)}{(\omega + \omega_0)} \right).$$

Отже тепер спектральна щільність "розмилась" і замість двох  $\delta$ -функцій з'явився сигнал із комбінації двох  $\delta$ -подібних функцій.



**Рис. 3. Спектральна щільність сигналу  $s(t) = \cos(2\pi t)$  при різних значеннях часу вибірки  $T$**

На рисунку (рис. 3) зображені перетворення сигналу функції  $s(t) = \cos(t)$  на скінченному інтервалі тривалістю  $T = 3, 20, 100$ . Із графіків можна зробити висновки:

1. Перетворення Фур'є гармонічної функції на скінченному інтервалі часу представляється сумою двох функцій  $\frac{\sin(x)}{x}$  в той же час коли спектральна густина той же функції на нескінченному інтервалі є лінійною комбінацією двох дельта-функцій на частотах  $\pm \omega_0$ . Тим не менш максимуми кожної із функцій  $\frac{\sin(x)}{x}$  розміщені на частотах  $\pm \omega_0$ . Це означає, що більша частина інформації про сигнал концентрується коло частот  $\pm \omega_0$ . Функція  $S_T(\omega)$  стає рівною 0 лише у деяких точках, що призводить до розмивання інформації по всій області частот.

2. Висота максимумів функції спектральної щільності рівна  $T/4\pi$ , а ширина  $4\pi/T$ . Це означає, що якщо запис зробити тривалішим, тобто збільшити  $T$ , то висота головних виступів збільшиться, а ширина - зменшиться і, тому у границі при  $T$  нескінченної тривалості центральний виступ перетвориться у дельта-функцію.

"Горб" функції  $F(\omega)$  на цій частоті називають "основним пелюстком". Його амплітуда прямо пропорційна тривалості часового вікна  $T$ . Основний пелюсток обмежений нулями функції спектральної густини на частотах  $\omega \pm 2\pi/T$ .

При необмеженому збільшенні тривалості часового вікна  $T$  амплітуда пелюстка прямує до нескінченності, а його ширина - до нуля, і спектральна щільність стає все більше і більше подібна на дельта функцію.

Крім основної пелюстки спектр містить також "бічні пелюстки", які примикають до основної. Їх ширина дорівнює  $2\pi/T$ , а амплітуда швидко спадає по відношенню до амплітуди основної пелюстки зі збільшенням номера.

Із скінченної тривалості  $T$  пов'язаний ще один ефект, який полягає в неможливості точного вимірювання частоти. Оскільки перетворення Фур'є представляється сумою двох функцій, то внаслідок наявності "осцилюючих хвостів" у кожної з функцій максимуми спектра зміщені щодо необхідних нам частот. Отже, точно оцінити частоту по кінцевій вибірці гармонійного сигналу у загальному випадку не можливо. Відзначимо, що більш високі частоти визначити легше,

так як взаємовпливи двох функцій  $\frac{\sin(x)}{x}$  при їх віддаленні одної від одної зменшуються.



Перейдемо тепер від спектральної щільності до дискретного спектру, тобто до спектру періодичного продовження сигналу  $x(t)$  з періодом, рівним тривалості часового вікна. Цей спектр являє собою набір гармонік на частотах :

$$\omega_k = 2\pi k / T$$

величина яких пропорційна спектральній щільності  $S(\omega)$ . Тут потрібно розрізнити два характерних випадки:

1. Тривалість часового вікна у точності кратна періоду сигналу  $\Omega$ :

$$T = m \frac{2\pi}{\Omega},$$

де  $m$  - ціле число. Звідки випливає, що гармоніка спектра з номером  $k = m$  точно співпадає із базовою частотою періодичного сигналу  $\Omega$ , всі решта гармонік, потрапляють в нулі функції спектральної щільності і, відповідно, їх амплітуди стають рівними нулю. Таким чином, спектр сигналу в даному випадку містить одну гармоніку на частоті  $\Omega$  і якісно збігається з спектром початкового сигналу  $s(t)$ .

2. Тривалість часового вікна не дорівнює цілому числу періодів сигналу  $s(t)$ :

$$T = m \frac{2\pi}{\Omega + \Delta\Omega},$$

де  $\Delta\Omega$  - мала добавка до частоти. В цьому випадку, ні одна з гармонік не співпадає із значенням частоти періодичного сигналу  $\Omega$  тоді, найближча до неї гармоніка з номером  $m$  відповідає частоті  $\Omega + \Delta\Omega$ , крім того інші гармоніки теж не співпадають із нулями функції спектральної щільності. Тому спектр аналізованого сигналу буде містити основну гармоніку на частоті  $\Omega + \Delta\Omega$  а також нескінченне число додаткових гармонік на частотах  $\Omega + \Delta\Omega \pm 2\pi k / T$ .

Отже, дискретний спектр одного і того ж сигналу кардинальним чином змінюється при невеликій зміні тривалості часового вікна. Оптимальним буде такий вибір часового вікна, коли його тривалість складає ціле число періодів сигналу. У цьому випадку вікно не спотворює вигляд спектра. Це легко зрозуміти, якщо згадати, що дискретний спектр будується по періодичному продовженню сигналу.

Легко зрозуміти, що якщо період цього продовження становить ціле число періодів сигналу - продовжений сигнал збігається з істинним. Якщо ж ні – то на граничних точках періодичного продовження виникають розриви функції чи її похідних. В результаті сигнал  $y(t)$  більше не є копією сигналу  $x(t)$ , а значить і вид його спектра буде відрізнятися від виду спектра вихідного сигналу:

- ◇ він буде містити додаткові гармонійні складові, яких немає в спектрі вихідного сигналу;
- ◇ частота основної гармоніки спектра виявиться зсунутою відносно реальної частоти.

Таке спотворення спектра, викликане обмеженістю часового вікна називають "розтікання" спектра. Явище розтікання спектру заважає проведенню спектральних вимірювань. Один і той же сигнал може давати різні спектри при різному виборі параметрів розрахунку.

Для виникненню розтікання спектра можна завадити:

- ◇ збільшенням тривалості вимірювань;
- ◇ вибором часу спостереження кратному періоду сигналу;
- ◇ використанням віконних функцій, котрі згладжують розриви функцій на границях часового інтервалу спрямовуванням функції до нульового значення.

### Віконні функції

Використання віконних функцій, фактично призводить до множення заданого сигналу  $s(t)$  на деяку "підходящу" функцію  $w(t)$  у часовій області. Функція  $w(t)$  називається часовим вікном. Згідно теореми про згортку множення двох функцій еквівалентно згортці в області частот:

$$S_w(\omega) = \frac{1}{2\pi} S(\omega) * W(\omega)$$

У наступній таблиці наведені застосовні на практиці дискретно-часові вікна. Для порівняння ефективності застосування того чи іншого часового вікна використовується декілька показників, представлених в таблицях, що наведені нижче.

Ширина смуги частот головної пелюстки характеризує роздільну здатність за частотою. Для її кількісної оцінки використовують показник  $B_\omega$  – ширину смуги на рівні половинної енергії, тобто на рівні, що знаходиться на 3 дБ нижче максимуму головної пелюстки.

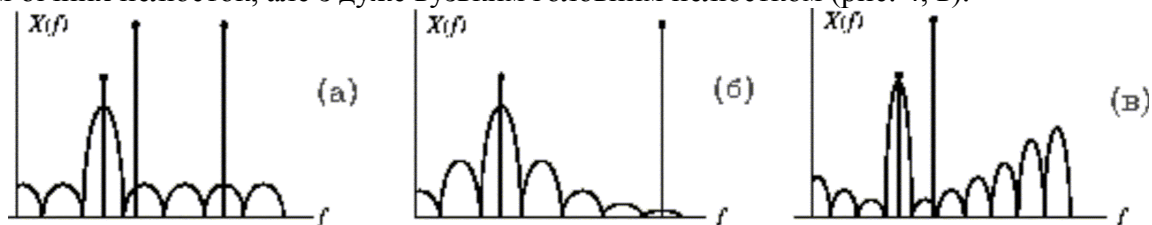
Ще два показника використовують для оцінки характеристик бокових пелюсток. Один із них – максимальний рівень бокових пелюсток, що дозволяє говорити наскільки вікно подавляє розтікання спектру. Інший показник – асимптотична швидкість спадання рівня бокових пелюсток при збільшенні числа відліків  $N$ . Усі показники виражені у децибелах.

З наведених у табл. 3 і на рис. 12 вікон найвужчий головний пелюсток має частотна характеристика прямокутного вікна, однак у неї найвищий рівень бічних пелюсток. Вікно Натала має мінімальний з усіх вікон рівень бічних пелюсток, але найширший головний пелюсток.

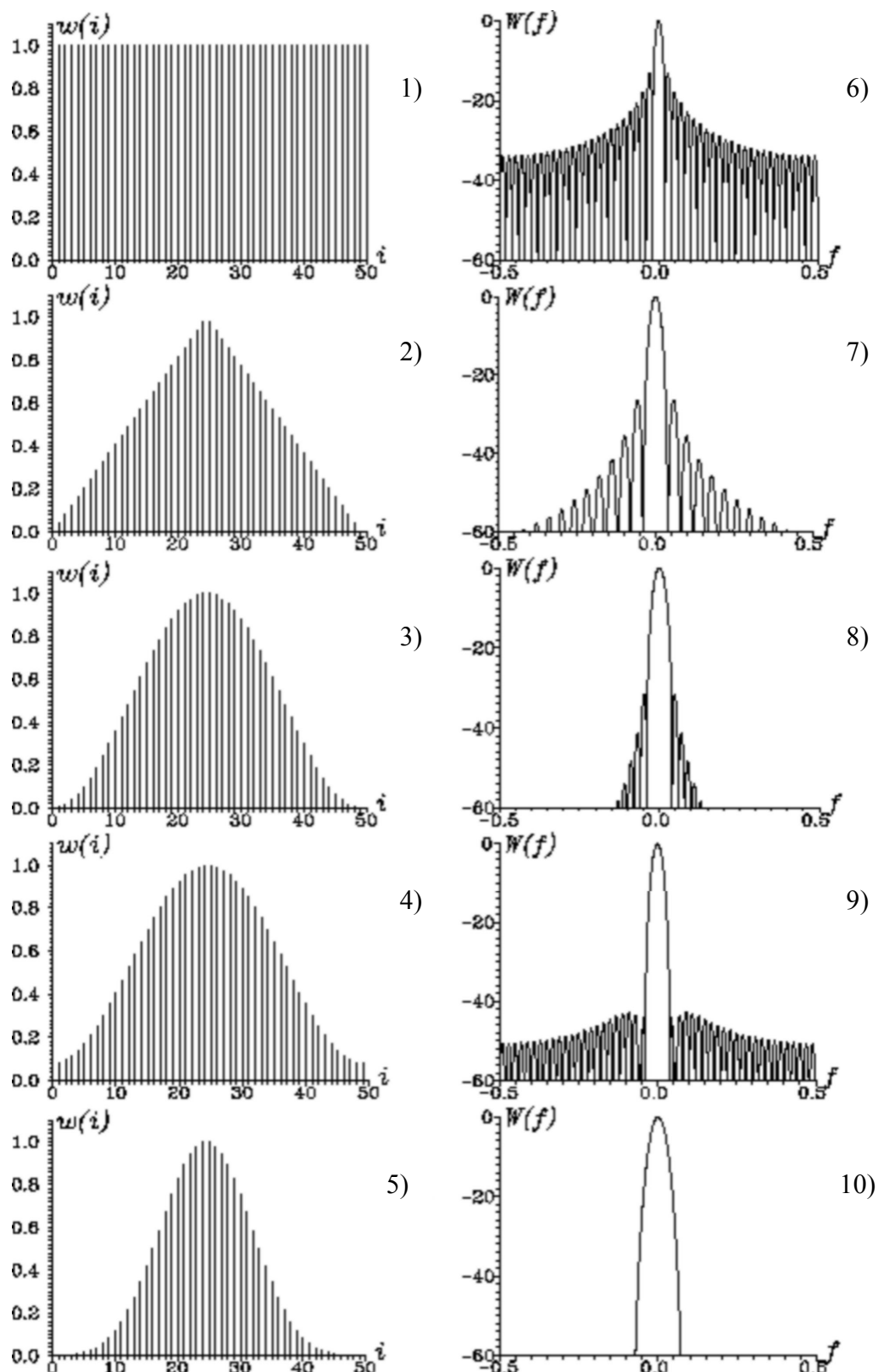
**Табл. 1**

Назва вікна	Часове представлення	Спектральна характеристика
Прямокутне	1	$W_r(\omega) = T \cdot \text{Sinc}(\omega T / 2) = T \cdot \frac{\sin(\omega T / 2)}{\omega T / 2}$
Трикутне (вікно Бартлета Bartlett window)	$1 - 2 t/T $	$\frac{4 \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{\omega T}{2}\right)\right)}{\omega^2 T}$
Косинус - квадратне (вікно Хана Hann window)	$\cos^2(\pi t/T)$	$\frac{4\pi^2 \sin(\omega T / 2)}{\omega(\omega^2 T^2 - 4\pi^2)}$
Припіднятий косинус (вікно Хемінга Hamming window)	$a + b \cos(\pi t/T)$ $a = 0.54$ $b = 1 - a$	$a \cdot T \cdot \frac{\sin(\omega T / 2)}{\omega T / 2} + b \cdot \frac{\pi T \cos(\omega T / 2)}{\pi^2 - \omega^2 T^2}$
Зважені косинуси (вікно Натала, Nuttall window $R = 3$ )	$a_0 - a_1 \cos(\pi t/T) + a_2 \cos(2\pi t/T) - a_3 \cos(3\pi t/T)$ $a_0 = 0.355768, a_1 = 0.487396, a_2 = 0.144232, a_3 = 0.012604$	
	$a_0 \frac{2 \sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\omega} + a_1 \frac{2\pi T \cos\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\omega^2 T^2 - \pi^2} + a_2 \frac{2T^2 \omega \sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{4\pi^2 - \omega^2 T^2} + a_3 \frac{6\pi T \cos\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{9\pi^2 - \omega^2 T^2}$	

Наприклад, якщо досить сильні (по амплітуді) гармонійні компоненти часового ряду розташовані поблизу і на віддалі від слабкої компоненти ряду, то слід вибирати вікно з однаковим рівнем бічних пелюсток близько головної пелюстки для того, щоб забезпечити мале зміщення слабкої компоненти (рис. 4, а). Якщо ж є одна сильна компонента, яка віддалена від слабкої, то слід вибирати вікно з швидко спадаючим рівнем бічних пелюсток, причому їх рівень близько головної пелюстки в даному випадку не має великого значення (рис. 4, б). У тому випадку, якщо необхідно забезпечити високу роздільну здатність між близькими компонентами, а віддалені компоненти відсутні, то прийнятним може виявитися навіть вікно з зростаючою рівнем бічних пелюсток, але з дуже вузьким головним пелюстком (рис. 4, в).



**Рис. 4. Приклади використання віконних функцій для поліпшення спектральної роздільної здатності у різних ситуаціях.**



**Рис. 5. Часові (1, 2, 3, 4, 5) та спектральні (6, 7, 8, 9, 10) представлення вікон: прямокутного (1, 6), трикутного (2, 7), Хана (3, 8), Хемінга (4, 9), Наттола (5, 10).**

З іншого боку якщо спектр часового ряду гладкий, то можна взагалі не застосовувати вікна. Іноді в часовий ряд додають випадкову компоненту, яка формує фон з бічних пелюсток на деякому рівні і, таким чином, дозволяє чітко побачити головні пелюстки.

Отже, застосування віконних функцій дозволяє знизити рівень бічних пелюсток в порівнянні з тим їх рівнем, який вони мали у випадку прямокутного вікна. Зниження рівня бічних

пелюсток зменшує зміщення сусідніх спектральних піків. Однак це дається ціною розширення головної пелюстки, що, природно, призводить до погіршення роздільної здатності за частотою. Отже, необхідно знаходити компроміс між шириною головної пелюстки і рівнем бічних пелюсток.

Табл. 2

Назва вікна	Ширина головної пелюстки за рівнем половинної енергії, $B_0$	Максимальний рівень бокових пелюсток, дБ	Швидкість спадання бокових пелюсток, дБ
Прямокутне	0.89	-13.3	-6
Трикутне	1.28	-26.5	-12
Хана	1.44	-31.5	-18
Хемінга	1.30	-43	-6
Натола	1.70	-98	-6

### Швидке перетворення Фур'є

Оснoву швидкого перетворення Фур'є (ШПФ) складає проріджування по частоті та пірамідальний алгоритм, який виключає повторний розрахунок членів ряду Фур'є, що періодично повторюються. Припустимо, що масив чисел  $f_k$  містить  $N = 2^r$  відліків ( $r$  – ціле число). Розділимо цей масив на два проміжних масиви з парними та непарними відліками:

$$f'_k = f_{2k}, f''_k = f_{2k+1}, \quad 0 \leq k \leq N/2 - 1.$$

Якщо тепер виконати ДПФ кожного з масивів з урахуванням того, що крок дискретизації функції збільшився вдвічі, отримаємо два проміжних спектри, період яких буде дорівнювати  $N/2$ :  $f'_k \rightarrow F'_n$ ,  $f''_k \rightarrow F''_n$ .

Для отримання однієї половини спектру складемо отримані спектри з врахуванням того, що відліки функції  $f_k$  зсунуті відносно функції  $f'_k$  на один крок дискретизації:

$$F_n = F'_n + F''_n \cdot e^{-i \frac{2\pi n}{N}}. \quad (8)$$

Інша половина спектру, що комплексно спряжена з першою, з врахуванням періоду повторення проміжних спектрів визначається виразом:

$$F_{n+N/2} = F'_n + F''_n \cdot e^{-i \frac{2\pi(n+N/2)}{N}} = F'_n - F''_n \cdot e^{-i \frac{2\pi n}{N}}. \quad (9)$$

Неважко побачити, що для розрахунку повного спектру в даному випадку знадобиться  $N^2/4$  операцій для розрахунку проміжних спектрів плюс ще  $N$  операцій комплексного додавання та множення, що створює досить відчутний ефект порівняно із звичайним ДПФ.

Але розділення масивів на дві частини може бути застосовано і до перших проміжних масивів, і до других, і т. і. до тих пір, доки в масивах не залишиться по одному відліку. Таким чином алгоритм перетворення стає пірамідальним алгоритмом перестановок зі складанням/відніманням та з одиничним множенням на значення  $e^{-j2\pi n/N}$ , що відповідає рівню піраміди. Виходячи з цього, загальна кількість операцій, що необхідна для повного розрахунку спектру дорівнює  $N \log_2 N$ . Отже, порівняно с ДПФ швидкість розрахунку збільшується в  $N/\log_2 N$  разів. Причому чім більше  $N$ , тим більший ефект від ШПФ.

Алгоритми прямого та зворотного ШПФ сьогодні широко застосовуються в сучасному програмному забезпеченні для аналізу та обробки цифрових даних.

### Швидке перетворення Фур'є у MathCAD

Mathcad містить функції для виконання швидкого прямого і зворотного дискретного перетворення Фур'є (ШПФ). У Mathcad входять два типи функцій для дискретного перетворення Фур'є:  $\text{fft}$  /  $\text{ifft}$  і  $\text{cfft}$  /  $\text{icfft}$ . Ці функції дискретні: вони беруть в якості аргументів і повертають вектори і матриці. Вони не можуть бути використані з іншими функціями.

Слід використовувати функції  $\text{fft}$  і  $\text{ifft}$ , якщо виконані наступні дві умови:

◇ аргументи функції дійсні

◇ вектор даних має  $2^m$  елементів.

У всіх інших випадках слід використовувати функції `cfft` і `icfft`.

Діло в тому, що функції `fft` / `ifft` використовують той факт, що для дійсних даних друга половина перетворення Фур'є є комплексно спряженою з першою. Mathcad відкидає другу половину вектора результату. Це зберігає і час і пам'ять при обчисленнях. Пара функцій `cfft` / `icfft` не використовує симетрію у перетворенні, тому вони дозволяють працювати із комплексними даними. Крім того пара функцій `fft` / `ifft` використовує високо ефективний алгоритм швидкого перетворення Фур'є. Для цього вектор аргументу, використовуваного з `fft`, повинен мати  $2^m$  елементів. У перетвореннях `cfft` / `icfft` використаний алгоритм, який допускає в якості аргументів як матриці, так і вектори довільного розміру. Причому, коли ця пара функцій використовується з аргументами типу матриць, обчислюється двовимірне перетворення Фур'є.

Зверніть увагу, що, якщо використана функція `fft` для прямого перетворення, необхідно використовувати функцію `ifft` для зворотного. Аналогічно, якщо для прямого перетворення використана `cfft`, то для зворотного необхідно використовувати `icfft`. Це зв'язано із різним нормуванням коефіцієнтів і різними угодами про знак перед уявною одиницею в показнику експоненти прямого і зворотного перетворень.

Функції `fft`, `ifft`, `cfft` і `icfft` використовують нормувальний коефіцієнт  $1/\sqrt{N}$  і додатний показник степеня у прямому перетворенні.

Для дійсних векторів з  $2^m$  елементами можна застосовувати пару функцій `fft` / `ifft`. В алгоритмі обчислення цих функцій використовуються переваги симетрії, яка існує лише для дійсних даних. Це дозволяє зберегти час, і пам'ять, необхідні для обчислень.

Функція `fft(v)` повертає дискретне перетворення Фур'є  $2^m$  значного дійсного вектора. Аргумент можна інтерпретувати як результат вимірювань через рівні проміжки часу деякого сигналу.

Вектор  $v$  повинен мати  $2^m$  елементів. Результат — комплексно значний вектор розмірності  $1+2^{m-1}$ . Якщо  $v$  має не  $2^m$  елементів, Mathcad видає повідомлення про помилку.

Елементи вектора, що повертаються `fft`, обчислюються за формулою

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} f_k \exp(2\pi jkn / N)$$

В формулі  $N$  — число елементів в  $v$ ,  $i$  — уявна 1.

Елементи у векторі, що повертається функцією `fft`, відповідають частотам

$$f_k = \frac{k}{N} \cdot f_s \quad \omega_k = 2\pi \frac{k}{N} \cdot f_s$$

де  $f_s$  - частота вимірювань вхідних даних.

Зворотне перетворення здійснюється функцією `ifft(c)`. Вектор  $v$  повинен мати  $1+2^m$  елементів, де  $m$  — ціле. Результат - комплексно значний вектор розмірності  $2^{m+1}$ . Якщо  $v$  має розмір відмінну від  $1+2^m$ , Mathcad видає повідомлення про помилку. Аргумент функції `c` — вектор, подібний на вектор у функції `fft`. Щоб обчислити результат, Mathcad спочатку створює вектор  $\bar{c}$ , комплексно спряжений до  $c$ , і додає його до вектора  $c$ , а потім обчислює вектор  $d$ , за формулою:

$$d_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} c_k \exp(-2\pi jkn / N)$$

Функції `cfft(A)` та `icfft(A)` працюють аналогічно до описаних вище, проте не потребують наведених вище обмежень на аргументи., однак вони працюють значно швидше, коли число рядків і стовпців може бути представлено у вигляді добутку великої кількості менших співмножників. Функції `cfft` та `icfft` — зворотні одна одній. Тобто `icfft(cfft(v))=v`.

Також MathCad підтримує альтернативні форми перетворення Фур'є. Функції `FFT`, `IFFT`, `CFFT` та `ICFFT` використовують  $1/N$  у якості нормувального коефіцієнта і від'ємний показник степеня у прямому перетворенні і одиничний коефіцієнт та додатний показник у зворотному.

$$F_n = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f_k \exp(-2\pi jkn / N)$$

$$f_n = \sum_{k=1}^N F_k \exp(2\pi jkn / N)$$

Всі функції мають векторні аргументи. При визначенні вектора  $v$  для знаходження перетворення Фур'є слід переконатись, що перший елемент вектора має нульовий індекс. Якщо елемент  $v$  не визначений, Mathcad автоматично встановлює його рівним 0. Це може привести до спотворення результату.

### Завдання

1. За допомогою програми MathCAD за допомогою функції `fft()` одержати та зарисувати спектри сигналів, перелічених у пунктах 1 та 2. При виконанні завдання рекомендується час спостереження сигналів зберігати постійним і таким, що складається з 512-1024 відліків; для детальнішого відображення спектру сигналу оберіть тривалість сигналу по відношенню до загального часу спостереження такою, щоб отриманий в результаті спектр був як найширший, враховуючи при цьому обмеження, які накладає на сигнал обрана частота дискретизації.

2. Для заданого сигналу (табл. Д1) дослідити особливості зміни спектру при:

- ◇ подовженні тривалості поодинокого імпульсу у два, чотири, вісім разів;
- ◇ повторенні сигналу – пакети з двох, чотирьох, восьми імпульсів.
- ◇ накладанні віконної функції із 2 вікнами (за вибором).

Отримані спектри зарисувати окремо та зіставити для кожного з підпунктів.

При дослідженні заданого сигналу використовуйте параметри обрані раніше. Для коректного порівняння результатів, що будуть отримані, в ході проведення вказаних досліджень заданого сигналу зверніть увагу на те, що змінюватись повинен тільки один з параметрів, що досліджується, зокрема, при зміні тривалості імпульсу або кількості імпульсів слідкуйте за тим, щоб загальний час спостереження та частота дискретизації залишались сталими. При повторенні заданого сигналу потрібно враховувати, що часовий інтервал між усіма імпульсами повинен бути однаковим і його потрібно обирати враховуючи загальний час спостереження.

3. Дослідити зміну спектру гармонічного сигналу при обмеженні часу його спостереження.

### Контрольні питання

1. У чому полягає відмінність дискретного та неперервного перетворень Фур'є?
2. Для яких сигналів використовують дискретне перетворення Фур'є?
3. Яким чином впливає на спектр зміна кількості відліків сигналу?
4. Яким чином впливає на спектр періодичного сигналу зміна кількості його періодів на відрізок часу спостереження?
5. Що таке віконна функція?

### Список літератури

1. Орнатский П.П. Теоретические основы информационно-измерительной техники. – Киев: Вища школа, 1983. – 455 с.
2. Каганов В.И. Радиотехника + компьютер + Mathcad. – М.: Горячая линия - Телеком, 2001. – 416 с.
3. Иванов В.А. и др. Математические основы теории автоматического регулирования. Учеб. пособие для вузов. / Под ред. Чемоданова Б.К. – М.: Высшая школа, 1971. – 808 с.
4. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. – СПб.: Питер, 2003. – 604 с.
5. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Радио, 1986.
6. Харкевич А. А. Спектры и анализ. – М.: Мир, 1957.
7. Гольденберг Л.М. и др. Цифровая обработка сигналов: Учебное пособие для вузов. – М.: Радио и связь, 1990. – 256 с.

**Додаток. Тестові сигнали**  
**Табл Д1. Тестові сигнали**

Номер	Вигляд сигналу	Прим.	Номер	Вигляд сигналу	Прим.
1		$T_c = 1$	2		$T_c = 7$
3		$T_c = 6$	4		$T_c = 6$
5		$T_c = 6$	6		$T_c = 8$
7		$T_c = 6$	8		$T_c = 8$
9	 $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi x}{T_c}, & 0 \leq x \leq T_c, \\ 0, & x > T_c. \end{cases}$	$T_c = 6$	10	 $f(x) = \begin{cases} \sin^2 \left( \frac{\pi x}{T_c} \right), & 0 \leq x \leq T_c, \\ 0, & x > T_c. \end{cases}$	$T_c = 6$
11		$T_c = 6$	12		$T_c = 8$
13		$T = 7$	14		$T_c = 7$
15		$T_c = 6$	16		$T_c = 6$

## Зміст

Тема роботи .....	3
Мета роботи.....	3
Дискретне перетворення Фур'є .....	3
Зв'язок між спектрами аналогового і дискретного сигналів .....	4
Відновлення аналогового сигналу з його рівномірної вибірки.....	6
Ефекти, обумовлені кінцевою довжиною реалізації.....	7
Віконні функції .....	9
Швидке перетворення Фур'є .....	12
Швидке перетворення Фур'є у MathCAD .....	12
Завдання.....	14
Контрольні питання.....	14
Список літератури .....	14
Додаток. Тестові сигнали.....	15
Зміст .....	16